

Дәріс 2.

Хабарламалардың, сигналдардың және шуылдардың математикалық модельдері

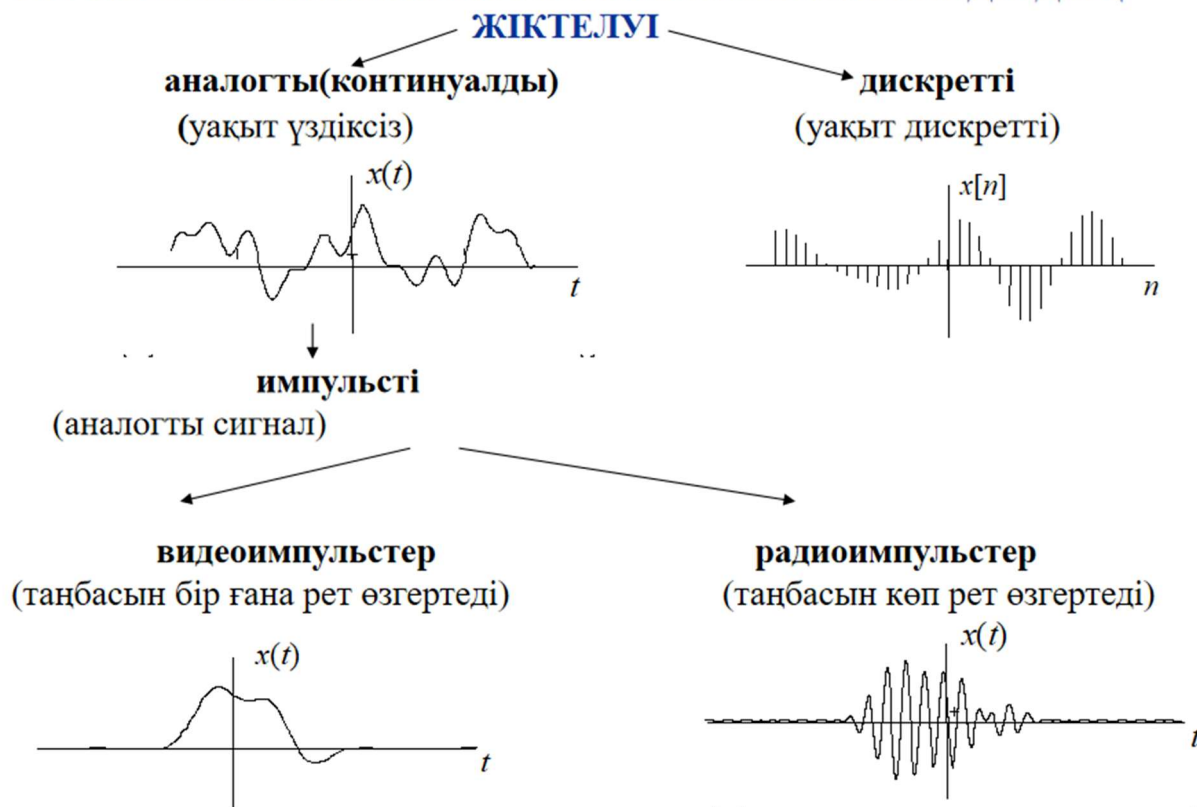
Кіріспе.

Сигналдардың жіктелуі (тәуелсіз айнымалысы бойынша):

1. Аналогты (континуалды) сигналдар. Уақыты үздіксіз болып келеді, яғни сигнал кез келген уақыт мезетінде анықталған және кез келген мәнді қабылдай алады. **Мысалдар:** Гармоникалық тербеліс, Дыбыстық сигнал, Видеоимпульс, Радиоимпульс т.б.

2. Дискретті сигналдар. Уақыты дискретті (уақыт бойынша үзіліс бар), яғни сигнал тек белгілі бір уақыт нүктелерінде ғана мәнге ие болады. **Мысалдар:** Сандық сигналдар (мысалы, 0 және 1), Квантталған сигналдар, М-тізбектері және т.б. **Импульстік сигналдардың түрлері (аналогты негізде):** Видеоимпульстер Таңбасын бір ғана рет өзгертеді (мысалы, көтерілу немесе түсу); Радиоимпульстер Таңбасын бірнеше рет өзгертеді (жоғары жиілікті тербеліс).

ТӘУЕЛСІЗ АЙНЫМАЛЫСЫ ТҮРІ БОЙЫНША СИГНАЛДАРДЫҢ ЖІКТЕЛУІ



СИГНАЛДАРДЫҢ КӨРІНІСІ СИПАТТАРЫ БОЙЫНША ЖІКТЕЛУІ



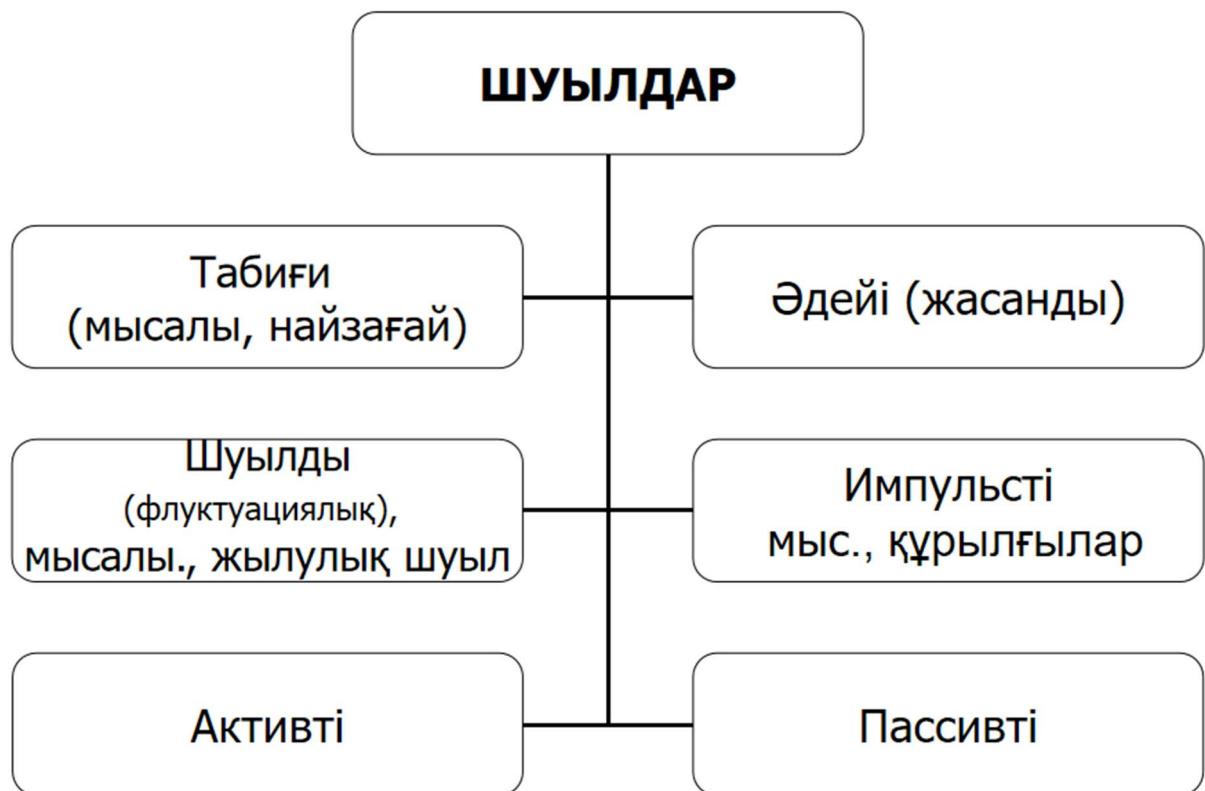
Детерминирленген сигналдар. Алдын ала дәл математикалық өрнекпен сипатталатын сигналдар. Болашақтағы мәндерін нақты есептеуге болады. Мысал: синусоидалық сигнал, экспоненциалды импульс. Детерминистик сигнал деп уақыттың өзгеруі кезінде күйі толығымен алдын-ала белгіленген сигналды айтамыз.

$$S(t_i + k \cdot T) = S(t_i), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$S(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega = 2\pi f$$

Кездейсоқ (стохастикалық) сигналдар. Уақыт бойынша өзгерістері кездейсоқ болып табылатын сигналдар. Олар ықтималдық заңдарына бағынады. Мысал: шу, радиотолқындағы кедергілер. Кездейсоқ (немесе қайталанбайтын) сигнал деп уақыт бойынша өзгерісін дәл болжауға болмайтын сигналды айтамыз.

Квазидетерминирленген сигналдар. Жалпы түрі детерминирленген сигналға ұқсас болғанымен, кейбір параметрлері кездейсоқ болып келеді. Яғни, толықтай болжауға келмейді, бірақ белгілі құрылымы бар. Мысал: модуляцияланған сигналдар.



Сурет 1 – Шуылдың жіктелуі

Шуылдардың жіктелуі (Сурет 1 бойынша):

Шығу тегі бойынша:

Табиғи (табиғи ортадан пайда болатын). Мысалы: найзағай, күн радиациясы, атмосфералық құбылыстар.

Әдейі (жасанды). Мысалы: радиожиілікті бұғаттау (глушилка), арнайы таратқыш құрылғылар, әскери және шабуылдау мақсатында қолданылатын шуылдар.

Физикалық табиғаты бойынша:

Шуылды (флуктуациялық). Жылулық шуыл (тепловой шум) — электрондардың жылулық қозғалысына байланысты, Джонсон-Никвист шуы. Шотки шуылы — заряд тасымалдаушылардың дискретті қозғалысы нәтижесінде.

Импульсті шуылдар. Мысалы: қуатты коммутациялық құрылғылардан шығатын қысқа мерзімді сигналдар (разряд, т.б.).

Белсенділігі бойынша:

Активті шуылдар — жүйеге энергия қосатын (мысалы, генераторлардан пайда болатын).

Пассивті шуылдар — сырттан энергия қоспайтын, табиғи түрде туындайтын (мысалы, жылулық шуыл).

СИГНАЛМЕН ӨЗАРА ӘСЕР ЕТУ ӘДІСІ БОЙЫНША КЕДЕРГІЛЕР МЕН ШУЫЛДАР ЖІКТЕЛУІ

1. Аддитивті (қосылатын) кедергілер / шулар

Бұл жағдайда кедергі немесе шу сигналға **қосылады**, яғни сигнал мен кедергі **қосындысы** ретінде қабылданады: $y(t)=s(t)+n(t)$. **Мысалдар:** Жылулық шуыл (тепловой шум). Ақ шу (white noise). Радиоқабылдағыш кірісіндегі фондық шу.

2. Мультипликативті (көбейтінді) кедергілер

Мұнда кедергі сигналды **көбейтеді**, яғни сигнал амплитудасы кедергімен **модуляцияланады**: $y(t)=s(t) \cdot n(t)$. **Мысалдар:** Фазалық және амплитудалық тербеліс тудыратын шулар, Радиоарнадағы баяу флуктуациялар. Модуляциялық шуылдар

3. Импульстік кедергілер.

Уақыт бойынша қысқа, бірақ **интенсивті** импульстер түрінде әсер етеді. **Мысалдар:** Найзағайдан, релелік немесе коммутациялық құрылғылардан пайда болатын кедергілер⁷ Импульстік электромагниттік өрістер

4. Спектралды қабаттасу арқылы әсер ететін (интерференциялық) кедергілер

Басқа сигналдың спектрі **басты сигналдың спектрімен қабаттасқанда** пайда болады.

Мысалдар: Жиілік бойынша жақын орналасқан арналардағы сигналдардың араласуы. Радиоэфирдегі сигналдар арасындағы интерференция.

Байланыс жүйелерінің түрлері

Жүйе түрі	Сипаттамасы	Мысалдар
Радиобайланыс	Радиотолқын арқылы	FM/AM радио, теледидар

Жүйе түрі	Сипаттамасы	Мысалдар
Оптикалық байланыс	Жарық (лазер, LED) арқылы	Оптикалық интернет
Спутниктік байланыс	Жер серігі арқылы	GPS, спутник ТВ
Ұялы байланыс	Мобильді радиожелі	GSM, 3G, 4G, 5G
Интернет желісі	Жаһандық сандық жүйе	WWW, VoIP, Email

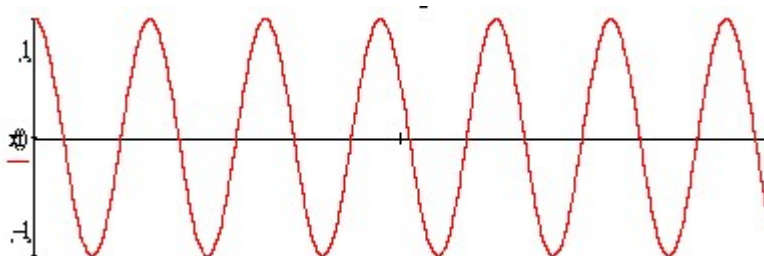
Сигнал модельдері

Жалпы алғанда, модель деп қандай да бір мағынада басқа объектіні алмастыратын қандай да бір объект (нақты немесе ойдан шығарылған) түсініледі. Біз үшін бұл басқа нысан физикалық процесс ретінде сигналды білдіреді. Теориялық қарастыру (экспериментке қарағанда) әрқашан үлгілерді пайдалануды қамтиды.

Мысалы, мына өрнек $A \cos(2\pi ft + \varphi)$

косинусты сигналдың (тербелістің) моделі болып табылады, мұнда A - амплитуда, f - циклдық жиілік, φ - бастапқы фаза.

Сол сигналдың графикалық моделі:



Косинустың орнына синусын қолдануға болады. Сонымен қатар, көп жағдайда күрделі гармоникалық тербеліс қарастырылады

$$A \exp[j(2\pi ft + \varphi)] = A e^{j(2\pi ft + \varphi)}$$

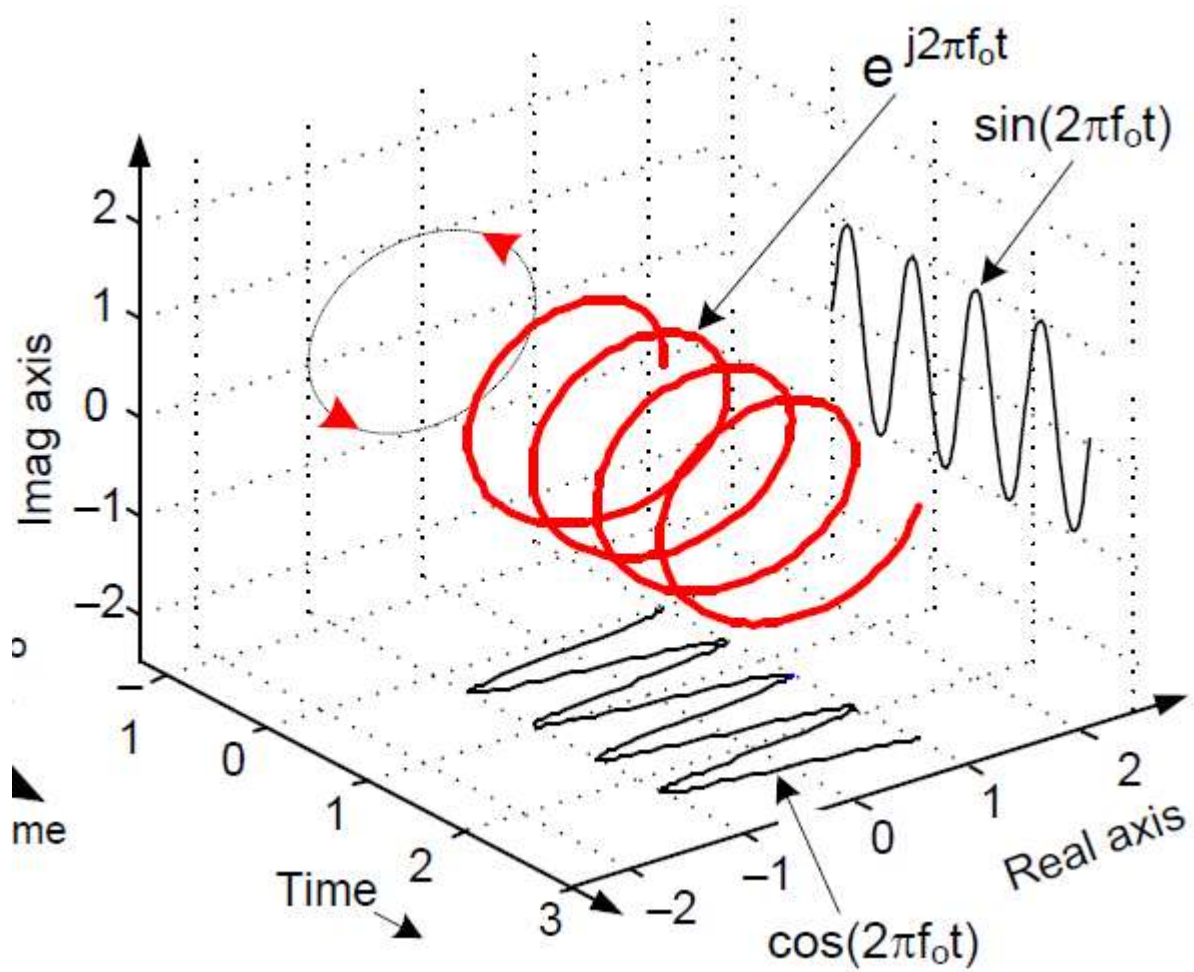
$$j = \sqrt{-1}$$

Эйлер формуласын сәйкес

$$A \sin(2\pi ft + \varphi) = \text{Im} \left\{ A e^{j(2\pi ft + \varphi)} \right\}$$

$$A \cos(2\pi ft + \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{j(2\pi ft + \varphi)} \right\}$$

$$A \exp[j(2\pi ft + \varphi)] = A \cos(2\pi ft + \varphi) + \\ + jA \sin(2\pi ft + \varphi)$$



Сурет 2 - Комплексі гармоникалық тербелістің үшөлшемді графигі

Периодты сигналдар

T кезінде

$$x(t) = x(t + T) \quad \text{периодты сигнал болады}$$

$$A \sin(2\pi ft + \varphi) = \operatorname{Im} \left\{ A e^{j(2\pi ft + \varphi)} \right\}$$

$$A \cos(2\pi ft + \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{j(2\pi ft + \varphi)} \right\}$$

$$A \exp[j(2\pi ft + \varphi)] = A \cos(2\pi ft + \varphi) + jA \sin(2\pi ft + \varphi)$$

Егер t қосса $k \cdot \frac{1}{f}$
функция мәні өзгермейді

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{период}$$

Хэвисайд қосылу функциясы

Хэвисайд қосылу функциясы (Heaviside step function) — математика мен инженерлік ғылымдарда кеңінен қолданылатын бөлшектік функция. Ол **берілген аргумент нөлден үлкен немесе кіші болғанда сигналдың қосылуын немесе ажырауын** сипаттайды.



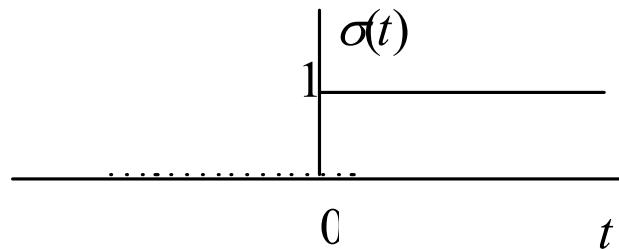
Oliver Heaviside, 1850-1925

Анықтама:

Хэвисайд функциясы $\sigma(t)$ келесі түрде анықталады:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{кезінде } t > 0, \\ 0.5 & \text{кезінде } t = 0, \\ 0 & \text{кезінде } t < 0. \end{cases}$$

Оның графикалық бейнеленуі төмендегі суретте көрсетілген

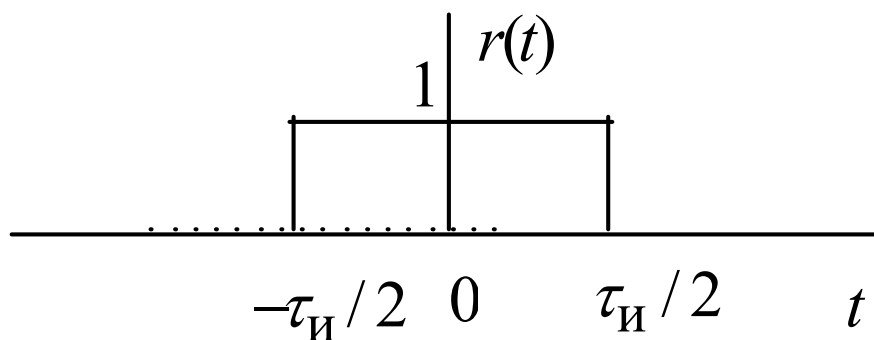


Қолданылуы:

- **Физикада:** Бір құбылыстың кенеттен басталуын сипаттайды (мысалы, токтың қосылуы).
- **Сигнал өңдеуде:** Импульс немесе кіріс сигналының басталуын белгілеу үшін.
- **Басқару жүйелерінде:** Жүйе күйінің өзгерісін модельдеуде.

Хевисайд функциясын пайдаланып тікбұрышты сигналдың өрнегін және сәйкес суретін алуға болады.

$$r(t) = \sigma(t + \tau_{\text{И}} / 2) - \sigma(t - \tau_{\text{И}} / 2)$$



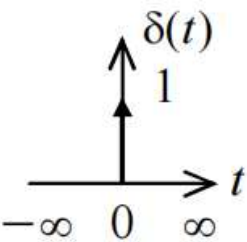
Дирак Дельта-функциясы



Paul Adrien Maurice Dirac
(1902-1984)

Анықтамасы (идеалды түрі):

Дирак дельта-функциясы $\delta(t)$ — теориялық физика мен математикада жиі қолданылатын **жалпылама функция** (distribution). Ол нақты функция емес, бірақ өте тар және биік импульс ретінде сипатталады. Бұл функция **нүктелік әсерді** (мысалы, бір нүктеде күш қолдану немесе заряд шоғырлануы) сипаттау үшін қолданылады. Оның өрнегі және графигі төменде келтірілген:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$$


Қасиеттері:

1. Іріктеу қасиеті (sampling property):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \delta(t - t_0) dt = x(t_0);$$

Бұл қасиет дельта-функцияның "тек" $x=t_0$ -да әсер ететінін көрсетеді.

2. Жылжу (shift):

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0);$$

Бұл дельта-функция $x=t_0$ -да шексіз мәнге ие болады.

3. Туынды немесе интеграл түрінде Хэвисайдпен байланысы:

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

4. Симметрия:

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

5. Масштабтау

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

6. Дирак дельта-функциясының спектралдық бейнесі немесе Фурье түріндегі сипаттамасы:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi ft) df .$$

7. Сүзгілеу қасиеті

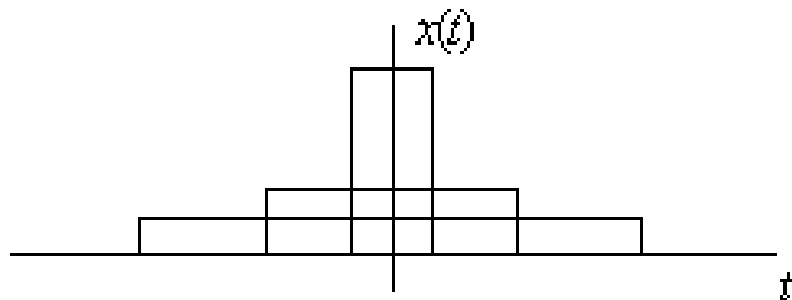
$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt$$

Қолданылуы:

- **Физикада:** Нүктелік заряд, нүктелік масса, механикалық соққы сипаттамаларында.
- **Электроникада:** Импульстік кіріс (идеалды қысқа сигнал) модельдеуде.
- **Сигнал өңдеуде:** Жүйе реакциясын (импульстік сипаттама) табуда.
- **Математикада:** Жүйелерді шешу кезінде интегралды операторлармен бірге.

Әрине импульс ұзақтығын азайтқан сайын тікбұрышты сигналдың биіктігі артады. Оны келесі өрнекпен дәлелдеуге болады. Төмендегі суретте импульс биіктігінің өзгерісі келтірілен.

$$f(t_0) = \lim_{\tau_{\text{и}} \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_{\text{и}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) r(t - t_0) dt$$



Демек дельта функциясын үзіліссіз (қадамдық) функцияларды ажырату үшін ресми түрде қолдануға болады

Сигналдардың динамикалық көрінісі

Сүзгілеу қасиетінің өрнегін пайдаланып (дельта функциясының қасиетін ескере отырып).

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt$$

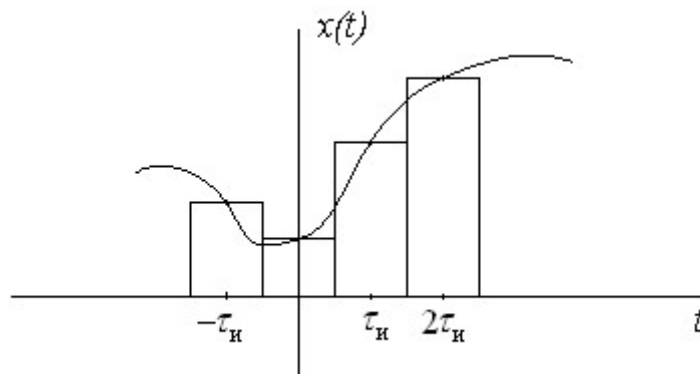
Уақыт бойынша шектеу енгізсек

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

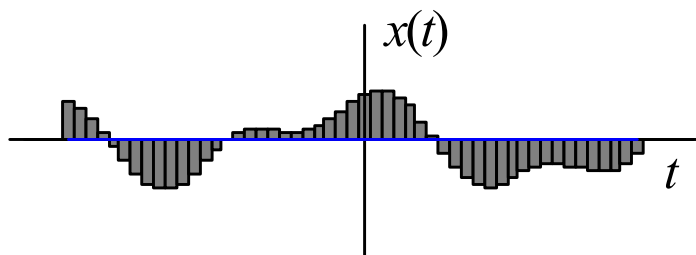
Қатар түрінде қарастыруға болады

$$x(t) = \lim_{\tau_{\text{И}} \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot \tau_{\text{И}}) \cdot \frac{r(t - n \cdot \tau_{\text{И}})}{\tau_{\text{И}}} \cdot \tau_{\text{И}}$$

Қатардың графикалық көрінісі төмендегі графикте келтірілен



Бұл өрнек шекті жағдайда мына графикке ұқсас болады

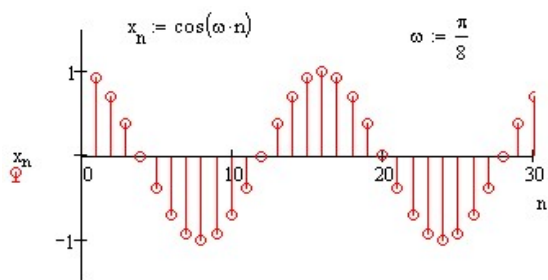


демек, динамикалық көрініс әртүрлі «амплитудалық» факторларға көбейтілген «дельта импульстерінің» «тығыз» қосындысы болып табылады.

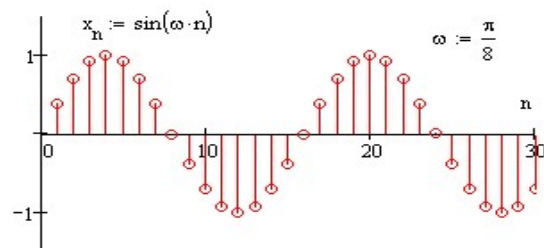
Гармоникалық қатарлар сол сияқты бейнеленеді:

Мысалы:

$$x[n] = A \exp[j(\omega n + \varphi)]$$



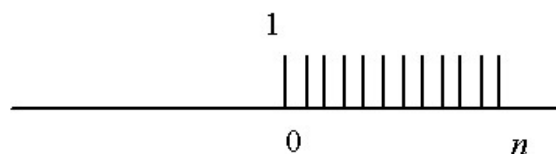
Нақты бөлігі



Жорамал бөлігі

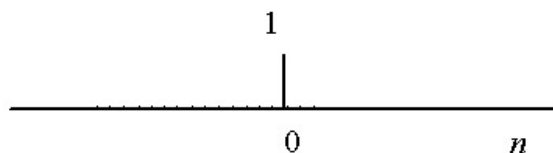
Дискретті сигнал моделі болып табылады.

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{кезінде } n \geq 0, \\ 0 & \text{кезінде } n < 0. \end{cases}$$



Дельта тізбегі (бір реттілік, «бірлік импульс»)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$



олардың байланысы:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

22

Нақты қатынастар

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \quad \text{және} \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Аналогтық сигналдың динамикалық көрінісіне ұқсас өрнек

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

қадамдардың бүтін санына жылжыған дельта тізбегінің салмақты қосындысына сәйкес келеді

СЫЗЫҚТЫ КЕҢІСТІК

Сызықтық кеңістік дегеніміз келесі аксиомаларды қанағаттандыратын объектілердің (векторлардың) жиынтығы:

А. Қосу операциясы анықталған, жиын қосуға қатысты

тұйық:

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M : (x + y) \in M$$

а1. ассоциативтілік $\forall x, y, z \in M : x + (y + z) = (x + y) + z$

а2. нөлдік вектордың болуы

$$\exists \vec{0} \in M : \forall x \in M : x + \vec{0} = x$$

а3. қарсы элементтің болуы

$$\forall x \in M \quad \exists (-x) \in M : x + (-x) = \vec{0}$$

а4. коммутативтілік $\forall x, y \in M : x + y = y + x$

Б. скалярға көбейту анықталған:

F

$$\forall x \in M \quad \forall \alpha \in F : \alpha x \in M$$

көбейту бойынша
тұйықталуы

б1. ассоциативтілік

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x = \alpha\beta x \quad \forall x \in M \quad \forall \alpha, \beta \in F$$

б2. бірлік элементтің болуы

$$\exists 1 \in F : \forall x \in M : 1x = x$$

б3. дистрибутивтілік

$$\begin{cases} \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y & \forall x, y \in M \quad \forall \alpha \in F, \\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x & \forall x \in M \quad \forall \alpha, \beta \in F. \end{cases}$$

Бұл аксиомалардың барлығы аналогты да, дискретті де – нақты және күрделі сигналдар үшін дұрыс. Сондықтан сигналдарды векторлар және векторлар деп атауға болады.

Бақылау сұрақтары

1. Тәуелсіз айнымалысының түрі бойынша сигналдардың жіктелуі
2. Сигнал классификациясын келтіріңіз
3. Гармоникалық тербеліс
4. Хэвисайд қосылу функциясы
5. Дирак Дельта-функциясы
6. Хэвисайд функциясы мен Дирак дельта функциясы арасындағы байланыс
7. Сигналдардың динамикалық көрінісі
8. Сигналдарды векторлар ретінде көрсету
- 9.Сызықты кеңістік қасиеттері
10. Периодты сигналдар